第 26 講　数と式・方程式・不等式(2)

1 [1]　不等式 $\dfrac{x^2-1}{x} \leqq 1$ を満たす実数 x の範囲を求めよ.

[2]　実数 x，y が $2x^2-2xy+y^2-2y-2x+5=0$ を満たすとき，x，y の値を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　x についての 3 次方程式 $x^3+(a-3)x^2+(-2a+b+3)x+a-b-15=0$ の 1 つの解が $3+\sqrt{3}\,i$ であるとき，実数の定数 a，b の値，および $3+\sqrt{3}\,i$ 以外の解を求めよ．

[2]　(1)　$x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$ を満たす 2 数 x，y を求めよ．

(2)　$x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3$，$xyz=1$ を満たす 3 数 x，y，z を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　a，b，c は実数とし，3次式 $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は　$p(1)=1$，$p(2)=2$，$p(3)=3$ を満たすとする．

(1)　a，b，c の値を求めよ．

(2)　$p(x)$ を $x-4$，$(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りをそれぞれ求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第26講　数と式・方程式・不等式(1)

[1]　k を実数の定数とする．x，y の連立方程式 $x+y=k$，$xy=k$ が実数解をもつとき，k のとり得る値の範囲は $k\leqq$ ア ，イ $\leqq k$ である．

[2]　実数を係数にもつ3次方程式 $x^3-x^2+ax+b=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，$a=$ ウ ，$b=$ エ である．

[3]　実数 a，x，y，z が $x+y+z=a$，$x^2+y^2+z^2=a^2-2a+14$，$xyz=-6a+6$ を満たすとき，$xy+yz+zx=a-$ オ である．

よって x，y，z は t の3次方程式 $t^3-at^2+(a-$ オ $)t+6a-6=0$ の3解である．

この3解のうち，少なくとも2つが等しいとき，$a=$ カ ，キク である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 26 講　数と式・方程式・不等式(2)

> 1 [1]　不等式 $\dfrac{x^2-1}{x} \leqq 1$ を満たす実数 x の範囲を求めよ．

$\dfrac{x^2-1}{x} \leqq 1$ の両辺に $x^2\ (>0)$ をかけて

$x(x^2-1) \leqq x^2$ 　　$x^3-x^2-x \leqq 0$ 　　$x(x^2-x-1) \leqq 0$

$x \neq 0$ より　$\boldsymbol{x \leqq \dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ 0 < x \leqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

> 1 [2]　実数 x，y が $2x^2-2xy+y^2-2y-2x+5=0$ を満たすとき，x，y の値を求めよ．

$2x^2-2xy+y^2-2y-2x+5=0$ を y について整理すると

$y^2-2(x+1)y+2x^2-2x+5=0$　……①

これを y の 2 次方程式とみると，y は実数より判別式 $D \geqq 0$

$\dfrac{D}{4}=(x+1)^2-(2x^2-2x+5)=-x^2+4x-4 \geqq 0$

$x^2-4x+4 \leqq 0$ 　　$(x-2)^2 \leqq 0$ 　　よって　$x=2$

このとき①より　$y^2-6y+9=0$ 　　$(y-3)^2=0$ 　　$y=3$

以上より　$\boldsymbol{x=2,\ y=3}$

> 2 [1]　x についての 3 次方程式 $x^3+(a-3)x^2+(-2a+b+3)x+a-b-15=0$ の 1 つの解が $3+\sqrt{3}i$ であるとき，実数の定数 a，b の値，および $3+\sqrt{3}i$ 以外の解を求めよ．

$x^3+(a-3)x^2+(-2a+b+3)x+a-b-15=0$ は，実数係数の方程式より，

$3+\sqrt{3}i$ が解ならば $3-\sqrt{3}i$ も解である．残りの解を α とすると，解と係数の関係より

$$\begin{cases} (3+\sqrt{3}i)+(3-\sqrt{3}i)+\alpha=-a+3 \\ (3+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)+(3-\sqrt{3}i)\alpha+\alpha(3+\sqrt{3}i)=-2a+b+3 \\ (3+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)\alpha=-a+b+15 \end{cases}$$

つまり $\begin{cases} \alpha=-a-3 & \cdots\cdots ① \\ 6\alpha=-2a+b-9 & \cdots\cdots ② \\ 12\alpha=-a+b+15 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$ である．

②−③より　$-6\alpha=-a-24$ 　　これと①より　$\alpha=3,\ a=-6$

このとき②より　$b=15$

以上より，$\boldsymbol{a=-6,\ b=15}$ 　　他の解は　$\boldsymbol{3-\sqrt{3}i,\ 3}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［2］ (1)　$x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$ を満たす 2 数 x, y を求めよ.

(2)　$x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3$, $xyz=1$ を満たす 3 数 x, y, z を求めよ.

(1)　$x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$　より　$\begin{cases} x+y=2 & \cdots\cdots① \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2 & \cdots\cdots② \end{cases}$

②より　$x+y=2xy$　つまり　$xy=\dfrac{1}{2}(x+y)=1$　……③

①, ③より x, y は 2 次方程式 $t^2-2t+1=0$ の 2 解である.

この方程式を解くと　$t=1$　　したがって　$\boldsymbol{x=1,\ y=1}$

(2)　$x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3$　より　$\begin{cases} x+y+z=3 & \cdots\cdots① \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3 & \cdots\cdots② \end{cases}$

②と $xyz=1$　……③より　$xy+yz+zx=3xyz=3$　……④

①, ③, ④より, x, y, z は 3 次方程式 $t^3-3t^2+3t-1=0$ の 3 解である.

これを解くと　$(t-1)^3=0$　　$t=1$　　したがって　$\boldsymbol{x=1,\ y=1,\ z=1}$

3 　a, b, c は実数とし, 3 次式 $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は　$p(1)=1$, $p(2)=2$, $p(3)=3$ を満たすとする.

(1)　a, b, c の値を求めよ.

(2)　$p(x)$ を $x-4$, $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りをそれぞれ求めよ.

(1)　$p(1)=1$, $p(2)=2$, $p(3)=3$　より　$p(1)-1=0$, $p(2)-2=0$, $p(3)-3=0$

よって, $q(x)=p(x)-x=x^3+ax^2+(b-1)x+c$　……①　とおくと,

$q(1)=0$, $q(2)=0$, $q(3)=0$ である.

よって, $q(x)=(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6$　……②

①, ②より　$a=-6$, $b-1=11$, $c=-6$　したがって　$\boldsymbol{a=-6,\ b=12,\ c=-6}$

(2)　(1)より　$p(x)=q(x)+x=(x-1)(x-2)(x-3)+x$　……③　と表される.

$p(x)$ を $x-4$ で割ったときの余りを r とすると

$p(x)=(x-4)Q(x)+r$　より　$p(4)=r$

よって③より　$r=p(4)=3\cdot2\cdot1+4=10$

よって　$p(x)$ を $x-4$ で割ったときの余りは **10**

また, ③より　$p(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りは $\boldsymbol{x}$ である.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第26講　数と式・方程式・不等式(1)

[1]　k を実数の定数とする．x，y の連立方程式 $x+y=k$，$xy=k$ が実数解をもつとき，k のとり得る値の範囲は $k \leqq$ ア ，イ $\leqq k$ である．

[2]　実数を係数にもつ3次方程式 $x^3-x^2+ax+b=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，$a=$ ウ ，$b=$ エ である．

[3]　実数 a，x，y，z が $x+y+z=a$，$x^2+y^2+z^2=a^2-2a+14$，$xyz=-6a+6$ を満たすとき，$xy+yz+zx=a-$ オ である．

よって x，y，z は t の3次方程式 $t^3-at^2+(a-$ オ $)t+6a-6=0$ の3解である．

この3解のうち，少なくとも2つが等しいとき，$a=$ カ ，キク である．

解答例

[1]　解と係数の関係から，x，y は t の2次方程式 $t^2-kt+k=0$ の2解である．

この方程式が実数解をもつ条件より　$(-k)^2-4k \geqq 0$　$k(k-4) \geqq 0$

よって　$k \leqq \mathbf{0}$，$\mathbf{4} \leqq k$

[2]　実数係数の3次方程式が $1+2i$ を解にもつとき，$1-2i$ も解にもつ．もう1つの解を α とおくと，解と係数の関係より

$(1+2i)+(1-2i)+\alpha=1$

$(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\alpha+\alpha(1+2i)=a$

$(1+2i)(1-2i)\alpha=-b$

よって　$\alpha=-1$，$5+2\alpha=a$，$5\alpha=-b$　より　$a=\mathbf{3}$，$b=\mathbf{5}$

[3]　$x^2+y^2+z^2=a^2-2a+14$　より　$(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=a^2-2a+14$

$x+y+z=a$　……①　より　$a^2-2(xy+yz+zx)=a^2-2a+14$

よって　$xy+yz+zx=a-\mathbf{7}$　……②

また，$xyz=-6a+6$　……③

①，②，③より，x，y，z は t の3次方程式

$t^3-at^2+(a-7)t+6a-6=0$　……④　の3解である．

④を因数分解すると

$(t-3)\{t^2+(-a+3)t-2a+2\}=0$

$(t-3)(t+2)(t-a+1)=0$　よって④の3解は　$t=3$，-2，$a-1$

これら3解がすべて等しくなることはない．

よって題意を満たすのは2解が等しいときで，

それは　$a-1=3$　または　$a-1=-2$　　つまり　$a=\mathbf{4}$，$\mathbf{-1}$ のときである．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。